УДК 519.8, 378.3

Г. І. БЕДРАТЮК
Хмельницький національний університет

ВИКОРИСТАННЯ MAPLE ПРИ ВИВЧЕННІ ДИСЦИПЛІНИ “МЕТОДИ СИНТЕЗУ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ”

Розглянуто способи розв’язання деяких оптимізаційних задач в середовищі Maple.
Several Maple environment approaches for solving some optimization problems have been considered.
Ключові слова: оптимізаційні задачі, середовище Maple.

Система комп’ютерної математики Maple випущена у 1981 році канадською фірмою “Waterloo Maple, Inc.” [1]. Maple успішно поєднує символьні маніпуляції, обчислювальну математику, потужну графіку та зручну мову програмування. В силу своєї зручності та універсальності Maple стала незамінним інструментом наукових досліджень для багатьох вчених, інженерів та студентів. Практично для кожного розділу математики в Maple розроблено окремий спеціалізований пакет команд. В даній статті ми розглянемо основні команди пакету simplex, який розроблений для розв’язання типових задач лінійного програмування, що зустрічаються в процесі вивчення дисципліни “Методи синтезу та оптимізації”. Для розуміння роботи потрібно мати початкові навики роботи в Maple, для чого достатньо ознайомитися з одним із багатьох доступних посібників, наприклад, [2, 3].

Нагадаємо, що основною задачею лінійного програмування [4] є знаходження мінімуму цільової функції

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

при наступних обмеженнях на змінні $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots a_{1,n}x_n \ge b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots a_{2,n}x_n \ge b_2, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots a_{m,n}x_n \ge b_m. \end{cases}$$

В матричному записі задача лінійного програмування записується у вигляді

$$A \cdot X \ge B,\ f = (C, X) \to \min$$

для деякої матриці A та векторів X, B, C.

Надамо короткий опис тієї частини мови програмування системи Maple та тих елементів цієї програми, які необхідні для вирішення основних завдань лінійного програмування. Після запуску програми Maple на екрані монітора комп’ютера з’являється головне вікно програми, в якому вже автоматично відкрита перша сторінка для вирішення завдань. Вона має назву “Untitled (1)”. Система Maple складається з декількох груп основних математичних підпрограм, а також з додаткових пакетів, які підключаються в міру потреби. Для задач лінійного програмування потрібен додатковий пакет simplex. Його назва пов’язана з тим, що основним реалізованим методом цього пакету є симплексний метод розв’язання задач лінійного програмування. Для підключення цього пакету потрібно в рядку після символу запрошення > набрати рядок такого виду:

```
>with(simplex);
```

Зауважимо, що рядок закінчується крапкою з комою – цим символом повинні закінчуватися всі ті рядки виконуваних системою команд, результати дії яких ми хочемо побачити на дисплеї. Якщо команду потрібно виконати, але результат виводити на екран не потрібно, то в кінці ставиться двокрапка.

Після набору команди “> with (simplex);” потрібно натиснути на клавішу вводу (Enter), яка змушує Maple виконати ту команду, яка розташована в рядку курсора. На екрані з’явиться повідомлення:

```
Warning, new definition for maximize
Warning, new definition for minimize,
```

а також виведеться список команд доступних в цьому пакеті. Основними серед цих команд є команди minimize та maximize. Команда minimize використовується з додатковими параметрами, які визначають цільову функцію (або її ім’я, якщо вона вже була задана заздалегідь), лінійні обмеження. Також можуть вказуватися тип змінних та імена змінних, яким будуть присвоєні деякі допоміжні значення, що виникають при розв'язанні задачі. Спрощений синтаксис цієї команд виглядає так:

minimize (Z, {C1, C2,C3…Cn});

Тут Z – цільова функція задачі лінійного програмування, а C1, C2, …, Cn – обмеження на змінні. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Знайти максимум функції

$$Z(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3$$

при обмеженнях

$$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \le 60,\ x1 - x_2 + 2x_3 \le 10,\ x_1 + x_2 - x_3 \le 20,$$

при невід'ємних x1, x2, x3. Записуємо цільову функцію та обмеження

```
> Z:=4*x[1]-3*x[2]+2*x[3]:
 C:={3*x[1]-5*x[2]+x[3]<=60,
 x[1]-x[2]+2*x[3]<=10,x[1]+x[2]-x[3]<=20};
```

$$constraints := \{3\,x_1 - 5\,x_2 + x_3 \le 60,\ x_1 - x_2 + 2\,x_3 \le 10,\ x_1 + x_2 - x_3 \le 20\}$$

Змінній Sol присвоємо результат виконання команди minimize

```
> Sol:=minimize(Z,C,NONNEGATIVE);
```

$$Sol := \{x_1 = 0,\ x_3 = 30,\ x_2 = 50\}$$

Зауважимо, що команди minimize та maximize повертають результат типу set (множина). Тому для знаходження мінімального значення функції Z можна виконати команду підстановки

```
> subs(Sol,Z);
```

$$-90$$

Отже, мінімальне значення цільової функції рівне –90. Якщо після натискання Enter числова відповідь не з'являється і немає повідомлень про синтаксичні помилки, то це означає, що задача не має розв'язку. У цьому випадку виводиться символ порожньої множини {}. Це означає, що у заданої цільової функції немає скінченого екстремуму, тобто при виконанні всіх заданих лінійних обмежень цільова функція необмежена за абсолютним значенням, або система лінійних умов несумісна. Спеціально для перевірки спільності умов у пакеті simplex є команда feasible, яка повертає логічні константи true або false. Наприклад,

```
> feasible(C, NONNEGATIVE);
```

$$true$$

тобто система умов C є сумісною. Для великих оптимізаційних задач виписувати вручну умови незручно, тому такі задачі краще розглядати у матричній формі написавши відповідні Maple процедури.

Приклад 2. Знайти мінімум функції

$$Z = 5x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5$$

при наступних обмеженнях невід'ємних змінних

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \ge 10,\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \ge 30,$$
$$-3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \ge -5,\ -x_1 - x_2 - x_4 \ge -10.$$

Для роботи з матрицями потрібно завантажити пакет linalg.

```
> with(linalg):
```

Задамо вектор змінних X:

```
> X:=convert([seq(x[i],i=1..5)],vector);
```

$$X := [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$$

та вектор C, який визначає цільову функцію

```
> C:=vector([5,-7,7,5,6]);
```

$$C := [5, -7, 7, 5, 6]$$

Скалярний добуток векторів X та C задасть необхідну цільову функцію:

```
> Z:=dotprod(X,C);
```

$$Z := 5\,x_1 - 7\,x_2 + 7\,x_3 + 5\,x_4 + 6\,x_5$$

Задамо матрицю A та вектор B:

```
> A:=Matrix([[2,3,4,2,2],[6,5,4,1,4],[-3,-2,-3,-4,0],[-1,-1,0,-1,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & -3 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> B:=vector([10,30,-5,-10]);
```

$$B := [10, 30, -5, -10]$$

Обмеження на змінні сформуємо як скалярний добуток рядків матриці на вектор X за допомогою оператора циклу

```
> C:={}: for  i from 1 to 4  do C:=C union {dotprod(X,row(A,i))>=B[i]}
end do: C;
```

$$\{10 \le 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + 2\,x_4 + 2\,x_5,\ -5 \le -3\,x_1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4,\ 30 \le 6\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 + 4\,x_5,\ -10 \le -x_1 - x_2 - x_4\}$$

Перевіримо систему нерівностей на сумісність

```
> feasible(C, NONNEGATIVE);
```

$$true$$

Отже, оптимізаційна задача має розв’язок, який знаходимо командою

```
> Sol:=minimize(Z,C,NONNEGATIVE);
```

$$Sol := \{x_4 = 0,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_3 = 0,\ x_1 = 0,\ x_5 = \frac{35}{8}\}$$

Значення цільової функції

```
> subs(Sol,Z);
```

$$\frac{35}{4}$$

Для зручності оформимо окрему процедуру для розв’язання задачі лінійного програмування записаної у матричному вигляді

```
> Simplex_Matrix:=proc(A,B,C)  local
n,m,Z,Ob,i,j,X,Sol:m:=rowdim(A):n:=coldim(A):X:=convert([seq(x[i],i=1..n
)],vector):Z:=dotprod(X,C):Ob:={}: for  j from 1 to m  do Ob:=Ob union
{dotprod(X,row(A,j))>=B[j]}  end do:Sol:=minimize(Z,C,NONNEGATIVE):
[Sol,subs(Sol,Z)] end proc;
```

```
Simplex_Matrix := proc(A, B, C)
local n, m, Z, Ob, i, j, X, Sol;
    m := rowdim(A);
    n := coldim(A);
    X := convert([seq(x[i], i = 1 .. n)], vector);
    Z := dotprod(X, C);
    Ob := { };
    for j to m do Ob := Ob union {B[j] ≤ dotprod(X, row(A, j))} end do ;
    Sol := minimize(Z, C, NONNEGATIVE);
    [Sol, subs(Sol, Z)]
end proc
```

Формальними параметрами для процедури

Simplex_Matrix

є матриці A, B, C, які потрібно визначити перед зверненням до неї. Процедура виводить точку мінімуму та значення цільвої функції у цій точці.

Транспортна задача. Розглянемо приклад розв'язання транспортної задачі в Maple. Як правило, транспортна задача розв'язується вручну методом мінімального елемента або методом Фогеля. Хоча її можна розв'язати і симплекс-методом.

Приклад 3. Деяка компанія має два заводи, F1 й F2, кожен з яких виробляє два вироби, P1 і P2, які повинні бути відправлені до трьох дистриб'ютерських центрів, D1, D2, D3. У наступній таблиці наведені витрати, пов'язані з доставкою кожного продукту з заводів у розподільчий центр, мінімальну кількість кожного продукту, потреби кожного розподільчого центру, і максимальну потужність кожного заводу. Скільки кожного продукту повинно бути відправлено з кожного заводу, щоб мінімізувати загальну вартість доставки у кожен розподільчий центр?

	F1/P1	F1/P2	F2/P1	F2/P2	Потреби
D1/P1	0.75		0.80		500
D1/P2		0.50		0.40	400
D2/P1	1.00		9.00		300
D2/P2		0.75		1.20	500
D3/P1	0.90		0.85		700
D3/P2		0.80		0.95	300
Виробництво	1000	400	800	900	

Позначимо через $x_{i,j}$ кількість продукції, яку нам потрібно перевезти до дистрибютера D$_i$ від виробника F$_j$. Тоді нам необхідно мінімізувати наступну цільову функцію

$$f = 0.75x_{1,1} + 0.8x_{1,3} + 0.5x_{2,2} + 0.4x_{2,4} + x_{3,1} + 9x_{3,3} + 0.75x_{4,2} + 1.20x_{4,4} + 0.9x_{5,1} + 0.85x_{5,3} + 0.9x_{6,2} + 0.95x_{6,4}$$

за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_{1,1}+x_{3,1}+x_{5,1}\le 100,\\ x_{2,2}+x_{4,2}+x_{6,2}\le 400,\\ x_{1,3}+x_{3,3}+x_{5,3}\le 800,\\ x_{2,4}+x_{4,4}+x_{6,4}\le 400,\\ x_{1,1}+x_{1,2}\ge 500,\\ x_{2,2}+x_{2,3}\ge 400,\\ x_{3,1}+x_{3,3}\ge 300,\\ x_{4,2}+x_{4,4}\ge 500,\\ x_{5,1}+x_{5,3}\ge 700,\\ x_{6,2}+x_{6,4}\ge 300,\\ x_{i,j}\ge 0. \end{cases}$$

Сформуємо в Maple цільову функцію. Для цього викличемо пакет linalg

```
> with(linalg):
```

та перетворимо матрицю тарифних коефіцієнтів M у вектор C:

```
>M:= Matrix([[0.75,0,0.8],[0,0.5,0,0.4],[1, 0, 0.9,0],[0,0.8,0,0.95]]),C:=convert(M,vector);
```

$$C := [\,0.75,\ 0,\ 0.8,\ 0,\ 0,\ 0.5,\ 0,\ 0.4,\ 1,\ 0,\ 0.9,\ 0,\ 0,\ 0.8,\ 0,\ 0.95\,]$$

Тепер сформуємо матрицю невідомих і конвертуємо її також у вектор.

```
> ff:= (i,j)->x[i,j]: X:=convert(Matrix(6,4,ff),vector):
```

Тоді скалярний добуток цих векторів дасть нам потрібну цільову функцію:

```
> f:=dotprod(X,C);
```

$$f := 0.75\,x_{1,1} + 0.8\,x_{1,3} + 0.5\,x_{2,2} + 0.4\,x_{2,4} + x_{3,1} + 0.9\,x_{3,3} + 0.75\,x_{4,2} + 1.20\,x_{4,4} + 0.9\,x_{5,1} + 0.85\,x_{5,3} + 0.8\,x_{6,2} + 0.95\,x_{6,4}$$

Сформуємо вектори потреб і запасів

```
> Mp:=[500,400,300,500,700,300]:Mo:=[1000,400,800,900]:
```

Сформуємо систему обмежень на змінні

```
> Co:={}:for  i from 1 to 6  do Co:=Co union
{dotprod(row(XX,i),row(MM,i))>=Mp[i]}  end do:for j from 1 to 4 do
Co:=Co union {dotprod(col(XX,j),col(MM,j))<=Mo[j]}  end do:Co;
```

$$\{x_{2,4}+x_{4,4}+x_{6,4}\le 900,\ x_{2,2}+x_{4,2}+x_{6,2}\le 400,\ 500\le x_{1,1}+x_{1,3},\ 400\le x_{2,2}+x_{2,4},\ 300\le x_{3,1}+x_{3,3},\ 700\le x_{5,1}+x_{5,3},\ 500\le x_{4,2}+x_{4,4},\ 300\le x_{6,2}+x_{6,4},\ x_{1,1}+x_{3,1}+x_{5,1}\le 1000,\ x_{1,3}+x_{3,3}+x_{5,3}\le 800\,\}$$

Перевіряємо її на сумісність

```
> feasible(Co, NONNEGATIVE);
```

$$true$$

Знаходимо точку мінімуму

```
> Sol:=minimize(f,Co,NONNEGATIVE);
```

$$Sol := \{x_{2,2}=0,\ x_{2,4}=400,\ x_{1,3}=0,\ x_{3,1}=0,\ x_{6,2}=0,\ x_{3,3}=300,\ x_{6,4}=300,\ x_{4,2}=400,\ x_{4,4}=100,\ x_{1,1}=500,\ x_{5,3}=500,\ x_{5,1}=200\,\}$$

Знаходимо значення цільової функції в цій точці

```
> subs(Sol,f);
```

$$2115.00$$

Коротко опишемо всі команди Maple, які використовувалися в цій роботі, але не були окремо пояснені в тексті.

Команда	Призначення
A:=B	Оператор присвоєння
subs(A,B)	Підстановка множини A у вираз B
vector(A)	Задання вектора списком його координат A
convert(A,vector)	Перетворення змінної A на вектор
dotprod(A,B)	Обчислення скалярного добутку векторів A, B
Matrix(A)	Задання матриці списком її рядків A
row(A,i)	Знаходить рядок матриці A з номером i
col(A,i)	Знаходить стовпчик матриці A з номером i
A union B	Об’єднання двох множин A і B
for i from 1 to n do команди end do	Оператор циклу
rowdim(A)	Кількість рядків матриці A
coldim(A)	Кількість стовпчиків матриці A

Список використаних джерел

1. http://www.maplesoft.com
2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / Дьяконов В.П. – М. : С. Пресс, 2006.
3. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель / Васильев А. Н. – М. : Диалектика, 2003. – С. 352.
4. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування / Цегелик Г.Г. – Львів : Світ, 1995.